

10. Festigkeitslehre

10.1 Einführung; Begriffe

10.1.1 Aufgabe der Festigkeitslehre

Als Ergebnis einer statischen Berechnung erhält man Auflager- und Reaktionskräfte sowie Schnittgrößen. Die Berechnung erfolgt, wie wir gesehen haben, am statisch **unverformten** System. Bei der Berechnung sind **Materialeigenschaften**, wie beispielsweise die Steifigkeit des zu untersuchenden Trägers oder seine Festigkeit, **irrelevant**.

Im Gegensatz dazu interessieren in der Festigkeitslehre sehr wohl die Eigenschaften des verwendeten Materials. Ziel ist es, die Verteilung der Schnittgrößen über den Querschnitt des Bauteils zu berechnen und schließlich auch die Auswirkungen dieser Beanspruchungen vorherzusagen, also die **Verformungen** des Trägers zu bestimmen. Neben den Abmessungen des Bauteils (Länge und Querschnittsform) ist das verwendete Material von entscheidender Bedeutung. In der Rechnung schlägt sich letzteres in sogenannten **Materialparametern** wie dem **Elastizitätsmodul** oder der **Querkontraktionszahl** nieder. Die Bestimmung dieser Parameter ist Gegenstand der **Werkstoffkunde**. Durch Kombination einer statischen Berechnung mit Ergebnissen der Festigkeitslehre gelingt es letztendlich auch, die Frage der Sicherheit einer Konstruktion zu klären.

Um die Kräfteverteilung im Inneren des betrachteten Bauteils und darüber hinaus auch seine Verformungen zu untersuchen, ist es nötig, vom **starr**en Körper der Statik auf **elastische** Systeme überzugehen (sogenannte **Elastostatik**). Im allgemeinen werden jedoch weiterhin die Gleichgewichtsbedingungen für das **unverformte** Bauteil ausgewertet (sogenannte Theorie erster Ordnung). Man setzt dabei voraus, dass die aufgrund aufgeprägter Lasten resultierenden Verformungen **klein** gegenüber den Abmessungen des Bauteils bleiben, was für typische Ingenieurwerkstoffe (Metalle, z.B. Stahl, Glas, Keramik) meistens gewährleistet ist. Die wenigen Ausnahmen, wo das Gleichgewicht durch die Verformung empfindlich gestört wird, müssen allerdings nach einer Theorie zweiter Ordnung behandelt werden. Zu diesen Ausnahmen zählt etwa das Knicken von Stäben oder Säulen.

Vom Material setzen wir bei unseren Berechnungen folgendes **Idealverhalten** voraus:

- a) Der Werkstoff soll **isotrop** und **homogen** sein, d.h. in allen Raumrichtungen soll dasselbe, gleichmäßige Gefüge vorliegen. Das ist bei klassischen Ingenieurmetallen (etwa Stahl) der Fall, bei Sonderwerkstoffen wie Einkristallen bei Superlegierungen oder auch Halbleitern i.a. jedoch nicht. Letztere zählen zu den anisotropen Werkstoffen, die im Rahmen dieser Einführung jedoch nicht behandelt werden.
- b) Der Werkstoff verformt sich ideal elastisch, d.h. die Belastung und die Verformung sind einander proportional. Somit sind plastische Verformungen oder Kriechvorgänge bei den folgenden Betrachtungen erst einmal ausgenommen.

10.1.2 Beanspruchungsarten

Die Beanspruchung eines Balkenquerschnitts infolge der Schnittkräfte und der Schnittmomente ist aus der statischen Berechnung bekannt (siehe Kapitel 7). Wir unterscheiden die nachstehend genannten Grundbelastungsfälle:

- a) **Normalkraftbelastung** (vgl. Abbildung 10.1.1): Hier greift die Kraft in der Schwerachse an und besitzt lediglich Komponenten in Richtung der Schwerachse. Je nachdem, ob der Kraftvektor in die Querschnittsfläche hinein- oder hinauszeigt, unterscheiden wir zwischen **Druck-** und **Zugbelastungsfällen**.

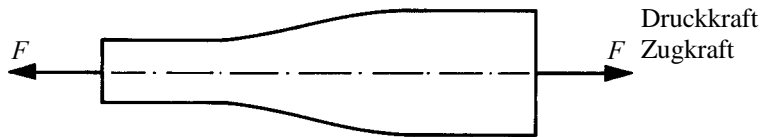


Abb. 10.1.1: Belastung durch normal zur Angriffsfläche wirkende Lasten.

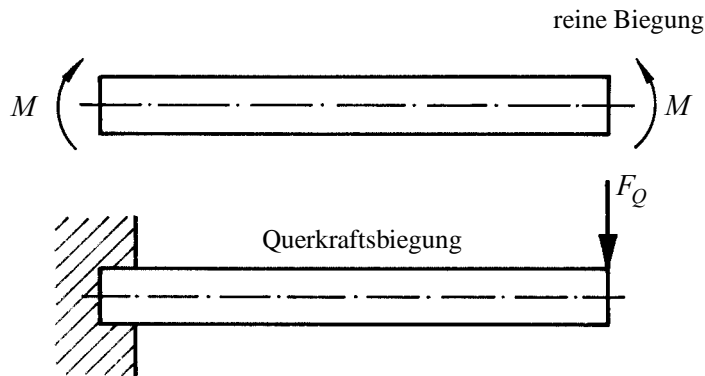


Abb. 10.1.2: Zur reinen Biegung sowie zur Querkraftsbiegung.

- b) **Biegung** (vgl. Abbildung 10.1.2): Bei der sogenannten **reinen** Biegung wird ein Momentenpaar an den Stabenden angebracht. Bei der sogenannten Querkraftbiegung erfolgt die Belastung (etwa am eingespannten Träger) durch eine Querkraft senkrecht zur Schwerachse.

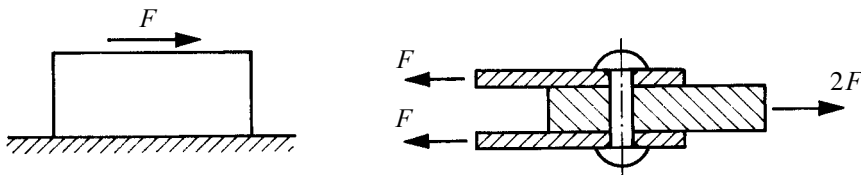


Abb. 10.1.3: Zur Schubbelastung eines am Tisch befestigten Klotzes sowie eines Niets.

- c) **Schubbeanspruchung:** Wird ein Körper in der dargestellten Weise (vgl. Abbildung 10.1.3, links) durch eine in der Schnittfläche liegende Kraft F belastet, so versucht er dieser Kraft zu folgen und schert (hier nach rechts) aus. Praktisch tritt Abscheren, also Scherkräfte, bei Niet, Schraub- und Bolzenverbindungen auf (vgl. Abbildung 10.1.3, rechts).

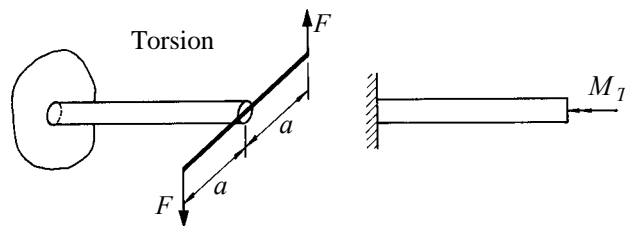


Abb. 10.1.4: Torsion eines Kreisstabes und die symbolische Darstellung der Torsion.

- d) **Verdrehung (Torsion)** (vgl. Abbildung 10.1.4): Hierbei wird ein Drehmoment in Richtung der Schwerachse auf den Träger aufgebracht.

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass die im realen Bauteil genannten Beanspruchungsarten gemeinsam wirken. Nachstehend werden wir jedoch zuerst jede der Beanspruchungsarten getrennt untersuchen. Die Frage der Überlagerung wird als letzte gestellt.

10.1.3 Begriff der Spannung

Um die Wirkung von Kräften auf Bauteile vergleichen zu können, insbesondere im Hinblick auf Festigkeitsfragen, ist nicht die Kraft, die in einem Querschnitt des Bauteils wirkt, als solche interessant. Vielmehr ist maßgebend, wie groß der Kraftanteil ist, der auf ein **Flächenelement** des Querschnitts wirkt, also die **Kraft pro Einheitsfläche**. Eine auf die Flächeneinheit bezogene Kraftgröße nennt man **Spannung** und wir definieren zunächst in Worten:

$$\text{Spannung} = \frac{\text{Kraftgröße}}{\text{Fläche}} . \quad (10.1.1)$$

Die Einheit der Spannung ist somit N/m^2 , die man auch als 1 Pa (Pascal) bezeichnet. Technisch relevante Spannungen sind i.a. wesentlich größer als 1 Pa, man benötigt MPa (Megapascal = 10^6Pa) oder sogar GPa (Gigapascal = 10^9Pa), um technischen Spannungen gerecht zu werden. In der technischen Literatur Deutschlands wird auch gern die Einheit $1\text{N/mm}^2 = 1\text{MPa}$ verwendet. Zur vollständigen Charakterisierung von Spannungen ist weiterhin die Richtung wichtig, unter der die Kraft auf die Flächeneinheit wirkt. Offenbar gilt es hier zwei verschiedene Fälle zu unterscheiden:

- a) Die Kraft greift senkrecht auf der Schnittfläche an, wie in der Abbildung 10.1.5 gezeichnet. Hierbei handelt es sich um eine reine Normalbelastung, eben durch eine Normalkraft ΔF , die als Zug- oder Druckkraft (so ist es gezeichnet) wirken kann. Berechnet man nun die zugehörige Spannung gemäß obiger Gleichung, so erhält man

konsequenterweise eine Normalspannung, die wir mit dem Symbol σ bezeichnen. Je nach Richtung der Normalkraft lässt sich noch zwischen Zug- bzw. Druckspannungen unterscheiden. **Druckspannungen** wollen wir per Definition durch ein **negatives** Vorzeichen kennzeichnen, **Zugspannungen** durch ein **positives**. Wir schreiben:

$$\sigma = \frac{\Delta F}{\Delta A}. \quad (10.1.2)$$

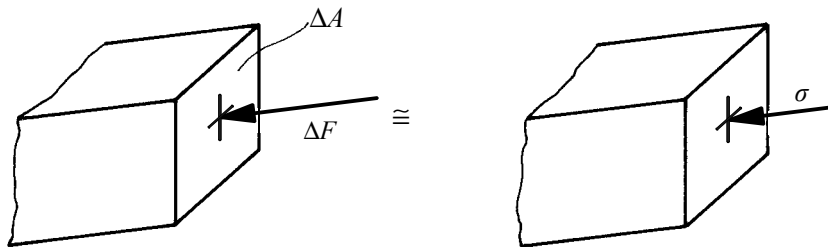


Abb. 10.1.5: Zum Begriff der Normalspannung.

- b) Die Kraft greift parallel zur Schnittfläche an, wie in der Abbildung 10.1.6 dargestellt. Es handelt sich also um eine reine Querkraftbelastung, und wir sprechen von einer aus ihr resultierenden Schubspannung, die wir mit dem Symbol τ bezeichnen. Man erhält:

$$\tau = \frac{\Delta F}{\Delta A}. \quad (10.1.3)$$

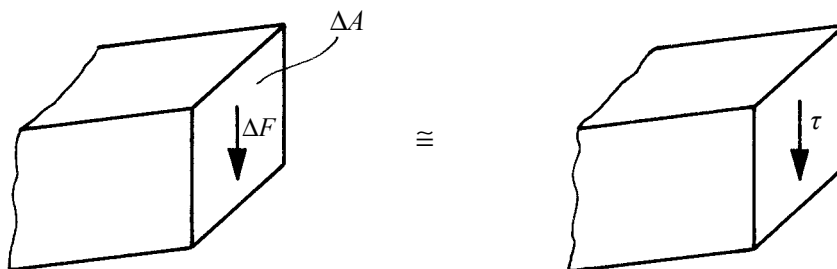


Abb. 10.1.6: Zum Begriff der Scherspannung.

Im allgemeinen werden beide Spannungen **gemeinsam** auftreten. Mehr noch, die Spannungen werden von Punkt zu Punkt über den Balkenquerschnitt **variieren**. Zum Beispiel werden wir später sehen, dass beim Aufprägen eines reinen Biegemomentes M im Balken (siehe Abbildung 10.1.7) die resultierende Normalspannung von einer Zugspannung (untere Balkenseite) linear über den Balkenquerschnitt in eine Druckspannung (obere Balkenseite) überwechselt.

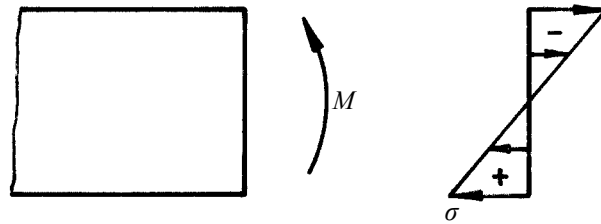


Abb. 10.1.7: Zum Begriff der Biegespannung.

10.2 Zug- und Druckbeanspruchung

10.2.1 Zug- und Druckspannung in Bauteilen

Betrachte den in Abbildung 10.2.1 dargestellten prismatischen Stab unter der Wirkung einer Zugkraft (Druckkraft) F , die an den Stabenden in der Schwerachse des Stabes angreift. In einem Querschnitt A fern von der Krafteinleitung ergibt sich eine über den Querschnitt konstante Zugspannung (Druckspannung) σ , die sich wie folgt berechnen lässt:

$$\sigma = \frac{F}{A}. \quad (10.2.1)$$

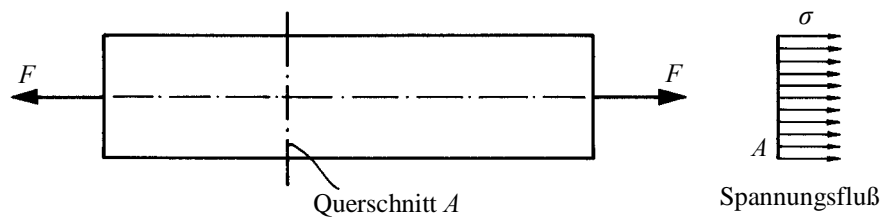


Abb. 10.2.1: Berechnung von Normalspannungen im Zugstab.

Vergleicht man Querschnitte entlang der Spannungsachse, so wird sich keine Änderung der nach obiger Gleichung berechneten Spannung ergeben, denn weder gibt es einen Grund, dass sich die Kraft F längs der Schwerachse ändert, noch ändert sich der Querschnitt des prismatischen Stabes. Man sagt: Der **Spannungsfluss** ist über alle Querschnitte entlang der Schwerachse gleich.

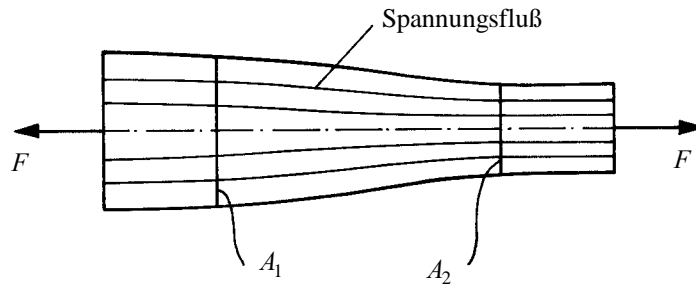


Abb. 10.2.2: Zum Konzept des Spannungsflusses.

Dies ist bei einem Stab, dessen Querschnitt sich längs der ansonsten geraden Schwerachse ändert, etwas anders: Abbildung 10.2.2. Betrachten wir die Querschnitte A_1 sowie A_2 , so gilt für die dort herrschenden Spannungen gemäß der Gleichung (10.2.1):

$$\sigma_1 = \frac{F}{A_1} \quad , \quad \sigma_2 = \frac{F}{A_2} \quad , \quad (10.2.2)$$

und je nachdem, ob A_1 oder A_2 der größere bzw. kleinere Querschnitt ist, wird σ_1 oder σ_2 die kleinere bzw. größere Spannung werden. Offenbar hat man minimale Spannung am maximalen Querschnitt und umgekehrt, mit einem Satz: Längs eines Trägers mit veränderlichem Querschnitt ändert sich der Spannungsfluss längs der Schwerachse.

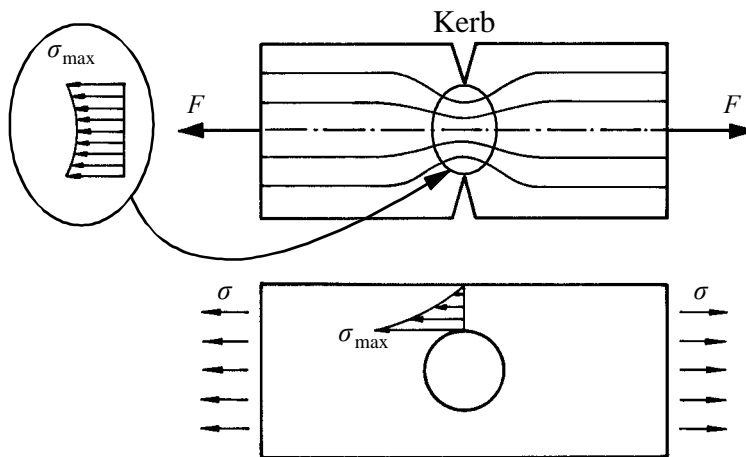


Abb. 10.2.3: Spannungskonzentratoren.

In der Tat, starke Querschnittssprünge haben Spannungsverteilungen zur Folge, wie in der Abbildung 10.2.3. zu sehen ist. Man spricht von der **Kerbspannungswirkung** an Kerben, Ecken und Kanten (Bild oben). Ein besonderer Fall ist die durch ein kreisförmiges Loch ge-

schwächte Platte (Bild unten). Man kann zeigen, dass durch die Verengung des Spannungsflusses an der Lochflanke eine Spannungsüberhöhung um den Faktor drei auftreten kann.

10.2.2 Beispiel: Spannungsverteilung in einem sich konisch verjüngendem Stab

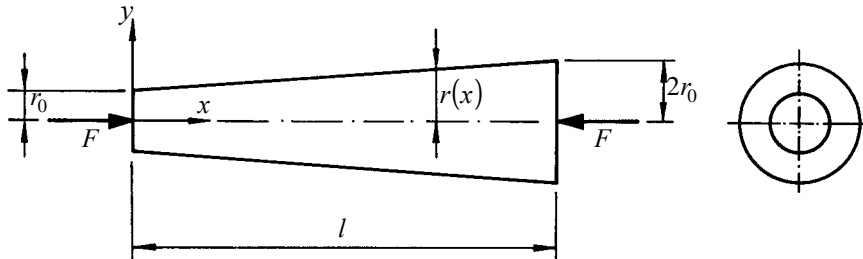


Abb. 10.2.4: Konischer Stab unter Drucklast

Betrachte den in Abbildung 10.2.4 dargestellten konischen Stab der Länge l mit kreisförmigem Querschnitt, dessen Endquerschnitte durch die Radien r_0 bzw. $2r_0$ gegeben sind. Er wird durch eine Druckkraft F in Stabachsenrichtung belastet. Wir wollen die Normalspannung $\sigma(x)$ an einer beliebigen Querschnittsstelle x ermitteln. Wir berechnen dazu einfach den zur Position x gehörigen Querschnitt. Offenbar gilt für den Radius dieses Querschnitts:

$$r(x) = r_0 + \frac{r_0}{l} x = r_0 \left(1 + \frac{x}{l} \right). \quad (10.2.3)$$

Damit folgt für die dazugehörige **Druckspannung** (Minuszeichen):

$$\sigma = -\frac{F}{A(x)} = -\frac{F}{\pi r_0^2 \left(1 + \frac{x}{l} \right)^2}. \quad (10.2.4)$$

Man erkennt, dass die Spannung am linken Ende viermal so groß wie am rechten Ende ist.

10.2.3 Beispiel: Stab gleicher Festigkeit

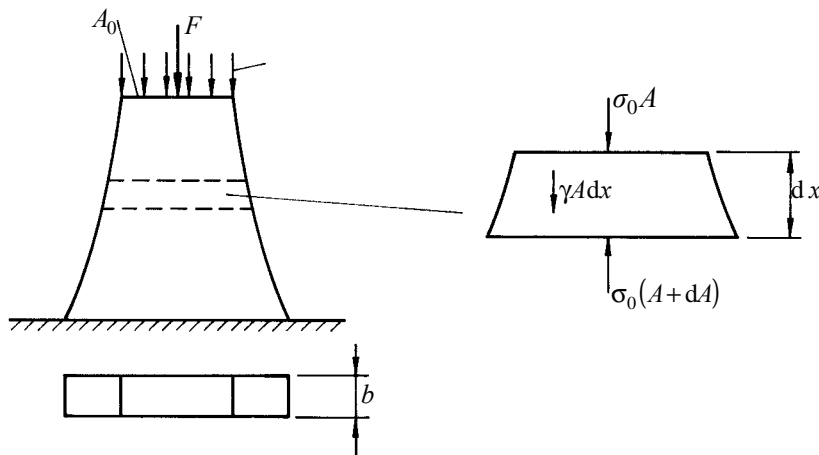


Abb. 10.2.5: Zur Frage des Profils eines Stabes gleicher Festigkeit.

Auch das **Eigengewicht** kann zu Spannungen in einem Körper führen. Betrachte beispielsweise den in der Abbildung 10.2.5 dargestellten senkrecht stehenden Körpers unter der Wirkung seines Eigengewichts. Der Körper soll ein spezifisches Gewicht der Größe γ in N/m^2 besitzen. Auf der oberen Stabfläche A_0 soll zusätzlich zum Gewicht die konstante Last F aufgeprägt sein. Bei gleicher Tiefe b des Stabes wird nun diejenige Form gesucht, so dass in jeder horizontalen Fuge die **konstante** Spannung $\sigma_0 = F/A_0$ herrscht. Natürlich wird sich mit zunehmender Stablänge zusätzlich zur aufgeprägten Last F das Eigengewicht des Stabes immer stärker bei der im jeweiligen Stabquerschnitt herrschenden Spannung bemerkbar machen. Um dennoch einen konstanten Spannungswert $\sigma_0 = F/A_0$ zu garantieren, muss der Stab geeignet verbreitert werden, d.h. seine Profilfläche muss sich nach unten hin vergrößern. Es stellt sich die Frage nach einem formelmäßigen Zusammenhang zwischen der jeweils nötigen Fläche A als Funktion der Höhenkoordinate (hier genannt x). Zur Lösung betrachten wir das in der Abbildung dargestellte, freigeschnittene Stabelement der Höhe dx , für das wir statisches Gleichgewicht untersuchen. Offenbar gilt:

$$\sigma_0 A + \gamma A dx = \sigma_0 (A + dA). \quad (10.2.5)$$

Dieses führt auf die folgende Differentialgleichung

$$\frac{dA}{A} = \frac{\gamma}{\sigma_0} dx. \quad (10.2.6)$$

Die Lösung lautet:

$$A(x) = A_0 \exp\left(\frac{\gamma}{\sigma_0} x\right), \quad (10.2.7)$$

was den gesuchten Zusammenhang darstellt.

10.2.4 Die Längenänderung des Zug- oder Druckstabes

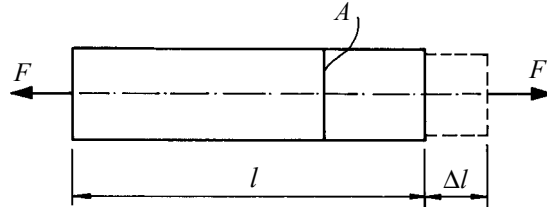


Abb. 10.2.6: Zur Längenänderung eines unter Zug stehenden Stabes.

Wie in der Abbildung 10.2.6 erkenntlich, verlängert (verkürzt) sich ein mit der Kraft F belasteter Zugstab (Druckstab) um den Betrag Δl . Wir definieren die sogenannte **Dehnung** (genauer **Axialdehnung**) ε als eine auf die Ausgangslänge l des Stabes bezogene Verlängerung:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \quad (10.2.8)$$

Die Dehnung ist also eine **dimensionslose** Größe. Die Erfahrung lehrt, dass bei vorgegebener Kraft die Verlängerung bei unterschiedlichen Materialien unterschiedlich stark ausfällt. Und zwar wird ein sehr steifes Material (Stahl) im Gegensatz zu einem sehr weichen Material (Gummi) bei gleicher Kraft eine viel geringere Verlängerung erfahren, was nach obiger Gleichung einer viel geringeren Dehnung entspricht. Die Steifigkeit eines Materials kennzeichnet man physikalisch durch den sogenannte Elastizitätsmodul E . Man ermittelt denselben aus Zugversuchen. Dies sei exemplarisch am Beispiel des Baustahls St37 vorgeführt. Im Prinzip fertigt man sich zunächst einen Probestab aus dem interessierenden Material (hier St37) wie in der Abbildung gezeigt. Man misst seinen Querschnitt A (vor der Belastung) und setzt ihn danach in einer Universalprüfmaschine einer Zugbelastung durch die Kraft F aus, die stetig ansteigt. Im Versuch misst man nun die zu der jeweiligen Last zugehörige Verlängerung und berechnet mit den obigen Gleichungen Wertepaare für die jeweilige Spannung und Dehnung, die man gegeneinander aufträgt. Das Ergebnis sieht aus, wie in Abbildung 10.2.7 gezeigt: Man beobachtet zunächst einen Bereich, in dem Spannung und Dehnung zueinander proportional sind. Hier gilt das sogenannte **HOOKESche Gesetz**, wonach Spannung und Dehnung zueinander in einem **linearen** Zusammenhang stehen:

$$\sigma = \varepsilon E. \quad (10.2.9)$$

Die Proportionalitätskonstante E ist der schon erwähnte **Elastizitätsmodul** des betreffenden Materials, auch Youngscher Modul genannt. Je größer derselbe ausfällt, desto mehr Widerstand setzt das Material seiner Verformung entgegen, desto steifer reagiert es also auf Krafteinwir-

kungen. Für St 37 beträgt E typischerweise 210 GPa, für Aluminium etwa 70 GPa und für Kupfer 120 GPa.

Das Ende des HOOKEschen Bereiches ist durch die **Plastizitätsgrenze** gegeben. Diese wird durch die **Proportionalitätsgrenze** σ_p angezeigt, von der ab die Dehnung beim Erhöhen der



Spannung überproportional zunimmt. Überschreitet man schließlich die sogenannte Fließgrenze, gekennzeichnet durch die sogenannte Fließspannung σ_F , so beginnt das Material plastisch zu fließen. Anschließend steigt die **Spannungs-Dehnungskurve** wieder an, das Material verfestigt sich.

Mit dem Namen des Gelehrten **Thomas YOUNG** (1773-1829) wird im angelsächsischen Raum gerne der Elastizitätsmodul bezeichnet. Gerechterweise muss man sagen, dass bei dieser Gepflogenheit des Patriotismus eine nicht unerhebliche Rolle spielt, denn hundert Jahre vor YOUNG verwendete der Schweizer Euler bei seinen Studien zur Biegelinie eine derartige, materialspezifische Größe. Nichts desto weniger ist es kurzweilig zu hören, wie YOUNG den Elastizitätsmodul einführt. Er sagt: „Der Modulus der Elastizität irgendeiner Substanz ist die Säule dieser selben Substanz, die an ihrer Basis einen Druck erzeugt, der sich bezüglich des Gewichts, das einen bestimmten Grad an Kompression verursacht, verhält wie die Länge der Substanz zur Verlängerung ihrer Länge.“ Der Mechaniker und Werkstoffwissenschaftler J.E. GORDON bemerkt sarkastisch in seinem bei Spektrum der Wissenschaft erschienenen Buch „Strukturen unter Stress“ zu dieser „bemerkenswerten“ Definition: „Verständlicherweise konnten sich nur wenige Leute vorstellen, was das wohl heißen mochte - falls es überhaupt etwas hieß.“ Wir müssen dem Quäker YOUNG jedoch eine gewisse Kapriziosität zugestehen, denn neben naturwissenschaftlichen Studien beschäftigte er sich, nota bene, mit Latein und Griechisch, was er sich im Knabenalter selber beibrachte, und außerdem mit Persisch, Französisch, Italienisch, Hebräisch und Arabisch, der Entzifferung der Hieroglyphen (nachdem Napoleon den Stein von Rosette als Folge des Ägyptenfeldzuges nach Europa gebracht hatte), absolvierte ein Medizinstudium und eröffnete 1799 in London eine Arztpraxis.

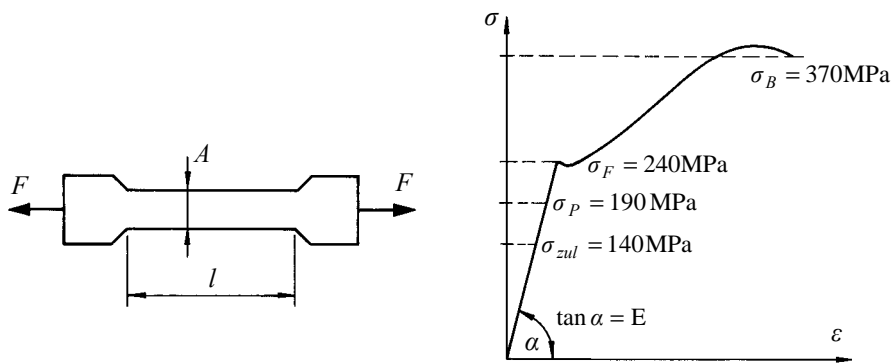
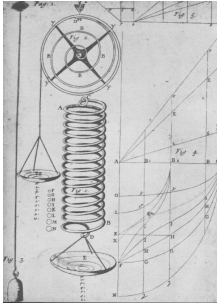


Abb. 10.2.7: Spannungs-Dehnungskurve von St 37.



Der Engländer **Robert HOOKE** (1635-1703) war einer der vielseitigsten Gelehrten des 17. Jahrhunderts. Seine Untersuchungen über Federn führten ihn auf mehr oder weniger verbale Formen des nach ihm benannten Gesetzes, das er in der damals üblichen manieristischen Art in einem Anagramm wie folgt zusammenfasste: CEIINOSSTTUU. Decodiert bedeutet dies „ut tensio sic vis“, was man mit „wie die Dehnung, so die Kraft“ übersetzen mag. Mit seinem Zeitgenossen und Kollegen Isaac NEWTON verband HOOKE Zeit seines Lebens eine herzliche Feindschaft. Um Newton zu ärgern und darüber hinaus seine Prioritätsansprüche zu wahren, publizierte er Schriften wie „A Decimate of the Centesme of the Inventions I Intended to Publish“. Im Übrigen wird berichtet, dass Robert HOOKE aufgrund einer Pockenerkrankung in seiner Jugend äußerlich nicht sonderlich reizvoll gewesen sein soll. Diesem Umstand muss man es wohl zuschreiben, dass wir über kein Porträt verfügen, auf denen er zu sehen ist. Wir wollen uns daher mit der Abbildung der „HOOKEschen Feder“ aus seinem Buch „De Potentia Restitiva“ bescheiden.

Es sei angemerkt, dass bei Entlastung des Materials aus diesem Bereich heraus, seine Dehnung nicht ganz auf Null zurückgeht, es verbleibt eine Restdehnung aufgrund plastischer Verformung. Schließlich kommt der Punkt, bei dem das Material bricht, die **Bruchspannung** σ_B . In manchen Spannungs-Dehnungs Schaubildern beruht das nichtmonotone Wachstum der Spannungs-Dehnungskurve übrigens auf der Verwendung der Referenzfläche A beim Berechnen der Spannung. Aufgrund der Querkontraktion nimmt der Probenquerschnitt bei zunehmender Belastung natürlich ab. Und in der Tat: Dividiert man bei der Spannungsberechnung durch den aktuellen Querschnitt der sich zunehmend einschnürenden Probe, so nimmt die Spannung natürlich zu. Es resultiert die sogenannte wirkliche oder physikalische Spannung im Probenquerschnitt im Gegensatz zur Ingenieursspannung der Zeichnung.

Schließlich ist im Diagramm noch die sogenannte zulässige Spannung σ_{zul} zu sehen. Bleiben wir unter ihr, so ist erstens sichergestellt, dass wir uns im linearen Bereich befinden (mit anderen Worten: dass das HOOKEsche Gesetz gilt) und dass zweitens keine dauernden plastischen Verformungen auftreten. Da die Proportionalitätsgrenze σ_P nicht exakt zu messen ist, wird bei zähen Stählen σ_{zul} auf die Fließgrenze bezogen (solche Stähle zeigen nämlich eine ausgeprägte Fließgrenze, die im Experiment gut sichtbar ist). Falls keine ausgeprägte Fließgrenze vorliegt, so bezieht man σ_{zul} auf die Bruchspannung. Es gilt im ersten Fall:

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_F}{\nu}, \nu = \text{Sicherheitsbeiwert} > 1 \text{ etwa } 1,5 \dots 2 \quad (10.2.10)$$

und im zweiten:

$$\sigma_{zul} = \frac{\sigma_B}{\nu}, \nu = \text{Sicherheitsbeiwert} > 1 \text{ etwa } 2,5 \dots 3,5. \quad (10.2.11)$$

Indem man den Ausdruck (10.2.8) für die Dehnung in das HOOKEsche Gesetz (10.2.9) einbringt, lässt sich bei bekannter Kraft F und Steife E des Materials die Längenänderung eines daraus gefertigten Stabes mit konstantem Querschnitt A wie folgt berechnen:

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA}. \quad (10.2.12)$$

Diese Gleichung hätte man auch ohne Herleitung „erraten“ können, denn wenn man sich fragt, von welchen Größen die Längenänderung Δl eines Stabes wohl abhängt und wie diese sie beeinflussen, so wird man wohl vermuten, dass Δl um so stärker ausfallen wird, je stärker man daran zieht und je länger der Stab ursprünglich war. Also gehören F und l in den Zähler des Ausdrucks (10.2.12). Weiter wird ein steifer dicker Stab seiner Dehnung größeren Widerstand entgegensetzen als ein weicher Stab von geringem Querschnitt. Also gehören E und A in den Nenner. Die Dehnung ε liegt bei ausgenutzten Baustählen in der Größenordnung von 1%, d.h. die eingangs gemachte Voraussetzung, dass die Verlängerung klein gegen die Ausgangslänge ist, ist mit Sicherheit erfüllt.

Neben der Längenänderung durch mechanische Belastung des Stabes, ist es auch möglich, den Stab durch **Erwärmung** zu verlängern (oder durch Abkühlung zu verkürzen). Die dazugehörige Dehnung ist proportional zur aufgeprägten Temperaturänderung ΔT . Man schreibt:

$$\varepsilon_T = \alpha_T \Delta T \quad (10.2.13)$$

und nennt den positiven Proportionalitätskoeffizienten α_T den **thermischen Ausdehnungskoeffizienten** des betreffenden Materials. Für Stahl beträgt er $12 \cdot 10^{-6} 1/K$ und für Aluminium ist er $23 \cdot 10^{-6} 1/K$. Die Temperaturänderung ΔT kann positiv (Erwärmung) oder negativ (Abkühlung) sein, was jeweils zu einer positiven bzw. negativen Dehnung führt. Wirkt sowohl eine mechanische Spannung als auch eine Temperaturänderung, so ergibt sich die Gesamtdehnung des Materials durch Superposition von mechanischer und thermischer Dehnung:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha_T \Delta T, \quad (10.2.14)$$

was man auch in folgender Form schreiben kann:

$$\sigma = E(\varepsilon - \alpha_T \Delta T). \quad (10.2.15)$$

Dieses um thermische Dehnungen erweiterte HOOKEsche Gesetz bezeichnet man auch als **DUHAMEL-NEUMANN-Beziehung**. Behindert man die thermische Ausdehnung etwa dadurch, dass man den Stab durch Zwingen auf einer festen Länge hält, so ergeben sich, wie man der obigen Beziehung ansieht, aufgrund der bei technischen Materialien wie z.B. Stahl enormen Größe von E sofort starke **Thermospannungen**.



Jean Marie Constant DUHAMEL wurde am 5. Februar 1797 in St. Malo geboren und starb am 29th April 1872 in Paris. Er schrieb sich 1814 an der École Polytechnique in Paris ein und graduierte im Jahre 1816. Danach hatte ihn die Wissenschaft offenbar ermüdet, denn er interessierte sich zeitweise wohl für den lukrativeren Beruf eines Advokaten, worauf sein anschließendes Studium der Rechte in Rennes hinweist. Schließlich jedoch geht er zurück nach Paris, um Mathematik an verschiedenen höheren Schulen zu lehren. Im Jahre 1830 wird er der Nachfolger des Physikers CORIOLIS, der Differential- und Integralrechnung an DUHAMELS alter alma mater lehrt. DUHAMEL bleibt der École Polytechnique bis zum Ende seiner professoralen Karriere im Jahre 1869 treu. Im Jahre 1840 wird er als Mitglied in die Académie des Science aufgenommen. DUHAMELS Arbeiten konzentrieren sich auf partielle Differentialgleichungen und ihre Anwendungen in der Wärmelehre, der Rationalen Mechanik und der Akustik. In seinen theoretischen Studien behandelt er die schwingende Saite sowie die Vibration von Luftsäulen in zylindrischen und konischen Röhren. Er entwickelt die Idee, dass die Schwingungen der Saite durch das Zupfen

der Härchen des Bogens hervorgerufen werden. Ihm entgeht es jedoch vollständig zu realisieren, dass die Wellenausbreitung längs der Saite nicht instantan erfolgt, ein Fakt, das später von dem Physiker Herrmann VON HELMHOLTZ klar erkannt wurde. DUHAMELS in der Wärmelehre angewandte Methoden waren mathematisch ähnlich zu denen die der Physikers FRESNEL in der Optik verwandte. Weiterhin basierte DUHAMELS Theorie der Wärmeleitung in Kristallen auf den Arbeiten von FOURIER und POISSON.



Franz Ernst NEUMANN wurde am 11 September 1798 in Joachimsthal, Brandenburg geboren (nun Jachymov) und starb am 23. März 1895 in Königsberg (nun Kaliningrad). Die Napoleonischen Kriege machten das Leben in Deutschland nicht gerade leicht, und es überrascht einen daher nicht zu hören, dass NEUMANNs Kindheit von großen Leiden und Armut geprägt war. Trotz geringster finanzieller Mittel schafft er es jedoch, die Volksschule in Joachimsthal zu besuchen und geht später an das Werder Gymnasium in Berlin. Preußen wurde im Jahre 1813 von der französischen Armee befreit, und wie es in jenen Tagen üblich war, entschied der junge NEUMANN sich als Freiwilliger zu den deutschen Truppen zu melden. Da er jedoch noch allzu jung war, wurde ihm nicht sofort erlaubt beizutreten, und man wies ihn zurück. In der Tat musste er bis zum Jahre 1815 warten, als das Militär in seiner unendlichen Güte und Weisheit es ihm erlaubt, sich Marschall BLÜCHERS Sturmtruppen anzuschließen. Und in der Tat, Franzens schönste Träume wurden wahr, als er endlich, schwerstverwundet, für tot am 16. Juli 1815 auf dem Schlachtfeld von Ligny zurückgelassen wird. Nachdem man ihn schließlich doch noch wiederfindet und ins Lazarett bringt, dauert es mehrere Monate bis zu seiner Genesung. Weniger couragierte Leute hätten nun wohl aufgegeben. Aber nicht so Franz Ernst NEUMANN! Dank seines deutschen Kampfgeistes entscheidet er sich unmittelbar danach an der Belagerung von Givet teilzunehmen, wo er verbleibt, bis die Belle Alliance NAPOLEON schließlich erfolgreich von den Vorzügen der Altersteilzeit auf St. Helena überzeugt hat. Im Jahre 1816 kehrt NEUMANN nach Berlin zurück und beginnt, vorzüglich vorbereitet durch seine militärische Erfahrung, an seiner akademischen Karriere zu arbeiten. Er vollendet 1817 das Gymnasium und geht auf die Berliner Universität um Theologie, die Rechte und Naturwissenschaften zu studieren. Besonders interessiert er sich für Mineralogie und wird 1820 der Assistent des Mineralogen E.C. WEISS. Als Resultat dieser Zusammenarbeit publiziert er ein Buch über Kristallstrukturen und promoviert im Jahre 1826. Im selben Jahr wird er Dozent für Mineralogie in Königsberg, wo er den berühmten Astronomen BESSEL und den Mathematiker JACOBY trifft. Nun avanciert er schnell. Er wird Assistenzprofessor im Jahre 1828 und in 1829 schließlich Ordinarius. 1831 formuliert er ein Gesetz zur Molekulartheorie der Wärme und publiziert seine Vorstellungen zur elektrischen Induktion in den Jahren 1845 bzw. 1847. Auf die weitere Entwicklung der Naturwissenschaften in Deutschland nimmt er starken Einfluss. So werden die später berühmten Physiker KIRCHHOFF, CLEBSCH and VOIGT NEUMANNs Doktoranden.

10.2.5 Die Querdehnung des Zug- oder Druckstabes

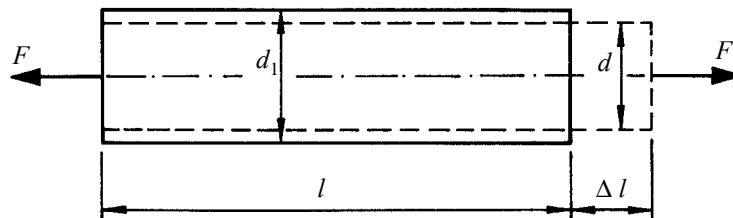


Abb. 10.2.8: Zur Querdehnung eines unter Zug stehenden Stabes.

Betrachte wieder den unter äußerer Last F stehenden Stab der Länge l . Selbstverständlich wird er sich nicht nur verlängern, sondern auch in Querrichtung verkürzen. Man spricht von der sogenannten **Querdehnung**: Abbildung 10.2.8. Die Änderung der Breite des Stabes pro Stabbreite, auch als **Querdehnung** ϵ_Q bekannt, ist gegeben durch:

$$\varepsilon_Q = \frac{\Delta d}{d} = -\nu \frac{\Delta l}{l}, \Delta d = d_1 - d < 0 \text{ oder } \varepsilon_Q = -\nu \varepsilon. \quad (10.2.16)$$

Dabei haben wir die sogenannte **Querdehnungszahl** ν (auch **POISSONSche Zahl** genannt) definiert, einen **dimensionslosen** Kennwert. Er liegt typischerweise um den Wert 0.3 (Stahl). Für nahezu inkompressible also volumenerhaltende Werkstoffe steigt er bis maximal auf den Wert 0.5. Dieses sieht man wie folgt. Nehmen wir einen kreisförmigen Stab vom Durchmesser d bzw. $d + \Delta d$ und der Länge l bzw. $l + \Delta l$. Dann gilt für sein Volumen vor und nach der Belastung:

$$V = \pi \left(\frac{d}{2} \right)^2 l, \quad V' = \pi \left(\frac{d + \Delta d}{2} \right)^2 (l + \Delta l). \quad (10.2.17)$$

Also folgt für inkompressible Werkstoffe:

$$V = V' \Rightarrow \varepsilon_Q = \frac{\Delta d}{d} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta l}{l}, \quad (10.2.18)$$

wenn man lediglich lineare Terme in Δd und Δl berücksichtigt. Ein Vergleich mit der Gleichung (10.2.16)₁ beschließt den Beweis.



Simon Denis POISSON (1781-1840) wurde in der Kleinstadt Pithiviers in ärmlichen Verhältnissen geboren, und es heißt, dass er bis zu seinem fünfzehnten Lebensjahr wenig Gelegenheit besaß, sich mehr als elementare Kenntnisse im Lesen und Schreiben anzueignen. 1796 wurde er zu seinem Onkel nach Fontainebleau geschickt und zwar eigentlich, um Medizin zu studieren. Diesem Wunsch seiner Familie gab er jedoch nicht nach und verschrieb sich stattdessen einem weniger blutrünstigen Metier, nämlich der Mathematik und Physik. In der Tat besaß er hierfür ein derart großes Talent, dass er 1798 das Eingangsexamen an der renommierten École Polytechnique in Paris mit Auszeichnung bestand und im Laufe der Jahre zu einer eminenten Figur in der französischen Akademie der Wissenschaften aufstieg.

10.2.6 Verformung statisch bestimmter Stabsysteme

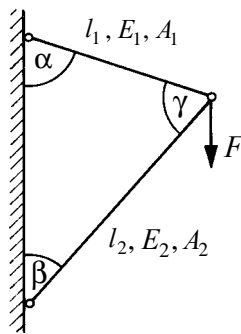


Abb. 10.2.9: Längenänderung in statisch bestimmten Stabsystemen.

Als ein wichtiger Anwendungsfall unserer Gleichung für die Verformung sowie die Längenänderung eines linear-elastischen Systems soll in diesem Abschnitt die Längenänderung in statisch bestimmten Stabsystemen besprochen werden. Wir betrachten die in Abbildung 10.2.9 dargestellte, uns bereits aus Abschnitt 3.5 bekannte Situation zweier miteinander verbundener Stäbe unter der Wirkung einer äußeren Kraft F . Damals interessierten die Stabkräfte, nun soll die Verlängerung bzw. Verkürzung der Stäbe untersucht werden. Wir wollen annehmen, dass die Elastizitätsmoduli, die Längen und die Querschnitte der Stäbe bekannt sind: $E_1, E_2, l_1, l_2, A_1, A_2$ und fragen nun nach der Längenänderung der Stäbe unter der Wirkung der Kraft F . Offenbar müssen wir die im Stab wirkende Druck- oder Zugkraft kennen, um die Verlängerungen zu bestimmen. Wir berechnen die Stabkräfte wie vormals aus dem Kräfteplan (Sinussatz) und erhalten:

$$S_1 = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} F, \quad S_2 = -\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} F. \quad (10.2.19)$$

Dabei haben wir berücksichtigt, dass es sich beim Stab 2 um einen **Druckstab** handelt (Minuszeichen). Wir erinnern uns, dass für die Verlängerung von Stäben bei bekanntem Querschnitt und Elastizitätsmodul die Gleichung (10.2.12) gilt, also auf den hier vorliegenden Fall übertragen:

$$\Delta l_1 = \frac{S_1 l_1}{E_1 A_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{S_2 l_2}{E_2 A_2}. \quad (10.2.20)$$

Der Stab 2 wird kürzer (Druckstab), der Stab 1 dagegen länger (**Zugstab**).

10.2.7 Statisch unbestimmte Stabsysteme

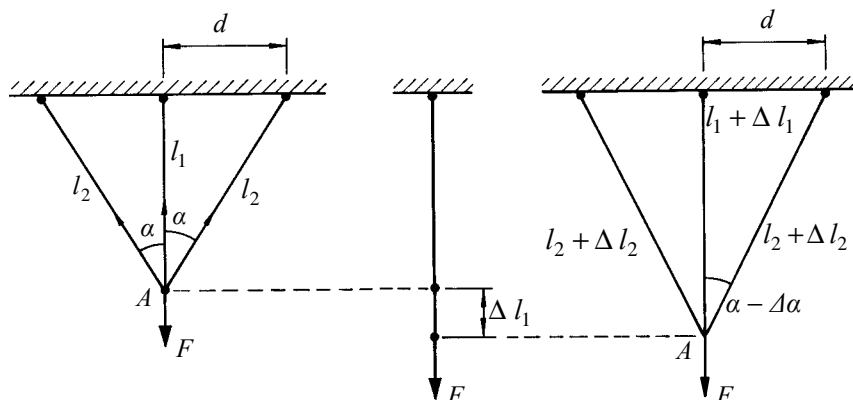


Abb. 10.2.10: Längenänderung und Kraftaufteilung in statisch unbestimmten Stabsystemen.

Das Stabsystem des letzten Abschnitts war statisch bestimmt: An einem Knoten griff eine Kraft an, und es interessierten die zwei Reaktionskräfte darauf, eben die beiden unbekanntes Stabkräfte. Pro Knoten in der Ebene lassen sich aber zwei Gleichgewichtsbedingungen formulieren

(zentrale Kräftegruppe), und die Lösung gelingt damit ohne weitere Probleme. Wir untersuchen nun das in Abbildung 10.2.10 gezeigte Problem, bei dem drei Stäbe miteinander verbunden sind und fragen nach den Stabkräften und der damit verbundenen Verlängerung. Die Belastung sei durch eine Zugkraft im gemeinsamen Knoten vorgegeben. Der Einfachheit halber seien die beiden Außenstäbe einander in Länge und Querschnitt gleich und der Elastizitätsmodul bei allen Stäben derselbe. Offenbar handelt es sich um ein **einfach statisch unbestimmtes** Problem. **Drei** Stabkräfte sind gesucht, für den Knoten A lassen sich aber nur **zwei** Gleichgewichtsbedingungen formulieren, denn wie im vorherigen Beispiel handelt es sich ja um eine zentrale Kräftegruppe. Wir brauchen neben den Kräftegleichgewichtsbedingungen, die in folgendem Ergebnis resultieren:

$$S_2 = \frac{F - S_1}{2 \cos \alpha} \quad (10.2.21)$$

noch eine weitere Gleichung, nämlich eine **Verformungsbedingung**. Um diese zu finden, argumentieren wir wie folgt: Der Stab 1 wird sich, wie gezeichnet, nach unten um ein Stück Δl_1 verlängern. Die Stäbe 2 werden sich ebenfalls verlängern und zwar um das Stück Δl_2 . Die Enden aller Stäbe müssen vor und nach Belastung zusammenpassen, gemäß der Bedingung (Satz des PYTHAGORAS, vgl. Abbildung 10.2.10):

$$l_2^2 - l_1^2 = d^2 = (l_2 + \Delta l_2)^2 - (l_1 + \Delta l_1)^2 \Rightarrow \Delta l_2 = \frac{\Delta l_1}{\cos \alpha}, \quad (10.2.22)$$

wobei man Terme zweiter Ordnung in Δl_1 und Δl_2 vernachlässigt hat.

Wertet man diese Beziehung mit Hilfe des HOOKEschen Gesetzes nach Gleichung (10.2.12) aus, so kann man schreiben:

$$\frac{S_1 l_1}{EA_1} = \frac{S_2 l_2}{EA_2 \cos \alpha}. \quad (10.2.23)$$

Die Gleichungen (10.2.21) und (10.2.23) sind zwei Gleichungen für zwei Unbekannte, nämlich S_1 und S_2 . Damit ist die Aufgabe gelöst. Das Endresultat lautet:

$$S_1 = \frac{F}{1 + 2(A_2/A_1)\cos^3 \alpha}, S_2 = \frac{F \cos^2 \alpha}{A_2/A_1 + 2\cos^3 \alpha}. \quad (10.2.24)$$

Es ist interessant zu untersuchen, was in den Grenzfällen $\alpha = 0$ und $\alpha = \pi/2$ geschieht. Der erste Fall führt nach Gleichung (10.2.22) auf:

$$S_1 = \frac{F}{3}, S_2 = \frac{F}{3}, \quad (10.2.25)$$

wenn man noch annimmt, dass die Querschnittsflächen aller Stäbe gleich sind. Mithin teilen sich alle drei Stäbe die Last gleichmäßig auf, was sofort einleuchtet. Im zweiten Fall hingegen folgt:

$$S_1 = F, S_2 = 0, \quad (10.2.26)$$

unabhängig von der Querschnittswahl, was ebenfalls klar ist, da nunmehr Stab Nummer 1 zum Halten bereitsteht.

10.2.8 Behinderte Wärmeausdehnung

Wir betrachten nun den in Abbildung 10.2.11 dargestellten, zwischen zwei starren Wänden eingespannten Stab, den wir um ein Temperaturintervall ΔT erwärmen. Der Stab möchte länger werden, die Wände behindern ihn jedoch in seiner Ausdehnung, und es werden im Stabinneren Wärmespannungen, im vorliegenden Fall genauer gesagt Wärmedruckspannungen entstehen. Diese wollen wir berechnen. Wir erinnern, dass ein frei stehender um das Intervall ΔT erwärmter Stab eine Längenänderung erfährt (siehe Gleichung (10.2.13)):

$$\Delta l_T = l\alpha\Delta T \quad (10.2.27)$$

Eine Druckkraft F auf seiner Oberfläche A erzeugt hingegen eine Verkürzung des Stabes:

$$\Delta l_\sigma = -\frac{lF}{EA}. \quad (10.2.28)$$

Lassen wir den Stab sich also erst frei ausdehnen und drücken wir ihn dann mit der Kraft F wieder zurück in seine Ursprungslage, so ist die effektive Verformung gleich Null:

$$\Delta l_T + \Delta l_\sigma \Rightarrow l\alpha\Delta T = \frac{lF}{EA}, \quad (10.2.29)$$

und man erhält die gesuchte Kraft bzw. Stabspannung zu:

$$F = EA\alpha\Delta T \Rightarrow \sigma = E\alpha\Delta T. \quad (10.2.30)$$

Formal hätten wir dies auch aus der Gleichung (10.2.15) sehen können, in der wir einfach die totale Verzerrung ε gleich Null setzen müssen, denn diese muss in unserem Beispiel gerade verschwinden.

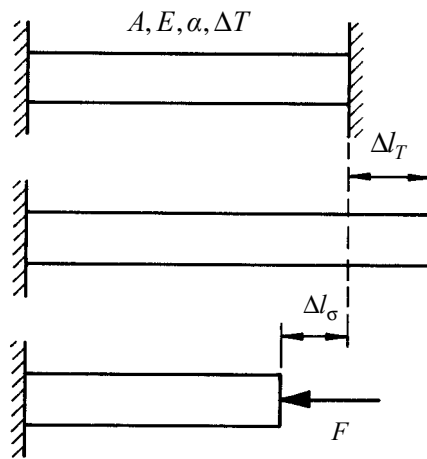


Abb. 10.2.11: Zur Entwicklung von Wärmeeigenspannungen.