

10.5 Schub infolge Querkraft beim Biegeträger

10.5.1 Zur Berechnung der Schubspannungen

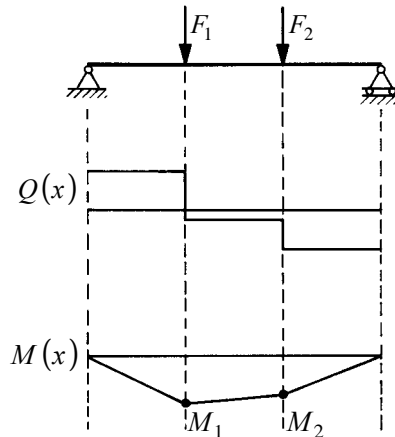


Abb. 10.5.1: Balken unter Querlast.

Betrachte die in Abbildung 10.5.1 dargestellte Situation. Ein Biegeträger mit rechteckigem Querschnitt wird durch einzelne Querkräfte beansprucht. Es resultiert die skizzierte Q - sowie M -Fläche. Wegen der Beziehungen (die Balkenachse sei in x -Richtung gelegt):

$$\sigma(x) = \frac{M(x)}{w_y} \quad , \quad Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} \quad (10.5.1)$$

folgt, dass sich die Biegespannungen in denjenigen Bereichen stark ändern, in denen die Querkraft groß ist. Die Querkraft, genauer gesagt die Schubspannungen, sind damit für den Aufbau der Biegespannungen wesentlich. Um die Schubspannungen zu ermitteln, verwenden wir wieder das Prinzip vom Gleichgewicht der Kräfte und gehen davon aus, dass die Biegespannungen bei Querkraftbiegung den gleichen Gesetzmäßigkeiten folgen wie bei der reinen Biegung. Davon war im letzten Abschnitt bereits die Rede.

Betrachten wir die Abbildung 10.5.2 so wird die folgende Kräftebilanz für das freigeschnittene schraffierte Balkenelement einsichtig:

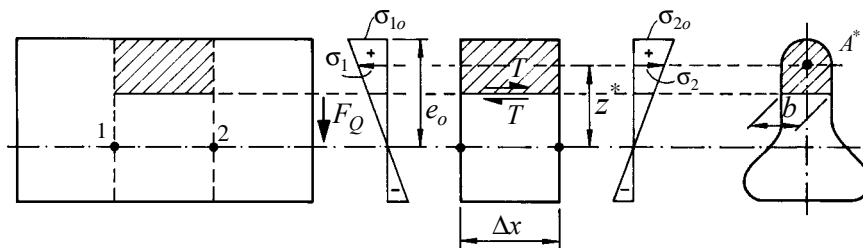


Abb. 10.5.2: Zur Berechnung der Schubspannungen.

$$-\sigma_1 A^* + \sigma_2 A^* + T = 0. \quad (10.5.2)$$

Außerdem gilt natürlich:

$$T = \tau b \Delta x, \quad (10.5.3)$$

wobei b die Breite der Fuge des gedanklich abgetrennten oberen Balkenteiles aus Abbildung 10.5.2 und τ die Scherspannung in eben jener Fuge bezeichnet. Ferner gilt die Formel für die Biegespannungen (in Bezug auf den Schwerpunkt des schraffierten Balkenteils):

$$\sigma_1 = \frac{M_1}{I_{yy}} z^*, \quad \sigma_2 = \frac{M_2}{I_{yy}} z^*, \quad (10.5.4)$$

und es folgt:

$$\tau(x, z) = \frac{M_1 - M_2}{\Delta x} \frac{A^* z^*}{I_{yy} b} = \frac{dM}{dx} \frac{A^* z^*}{I_{yy} b} = \frac{Q(x)}{I_{yy} b} \frac{A^* z^*}{I_{yy} b} = \frac{Q(x) S_y^*(z)}{I_{yy} b(z)}. \quad (10.5.5)$$

Die Größe $A^* z^*$ ist nämlich nichts anderes als das aus Gleichung (5.4.3) bekannte **statische Flächenmoment erster Ordnung** $S_y^*(z)$. Zu seiner Berechnung ist es nötig, die sich über der Höhe z gegebenenfalls ändernde Querschnittsform des betrachteten Balkens zu kennen. Ist sie bekannt, so gibt Gleichung (10.5.5) den gesuchten Verlauf der Schubspannungen über der Balkenhöhe an.

Eine letzte Anmerkung, bevor wir uns der Berechnung von Schubspannungen bei verschiedenen Querschnitten zuwenden: Bei der Berechnung der Biegespannungen galt die Voraussetzung, dass die Trägerquerschnitte bei der Verformung eben bleiben. Durch die unterschiedlichen Schubspannungen über der Trägerhöhe ist diese Voraussetzung im allgemeinen nicht streng erfüllt. Man muss jedoch sagen, dass der Einfluss der Schubspannungen auf die Größe der Biegespannungen für nicht allzu kurze Träger vernachlässigt werden kann.

10.5.2 Berechnung der Schubspannungen für spezielle Trägerformen

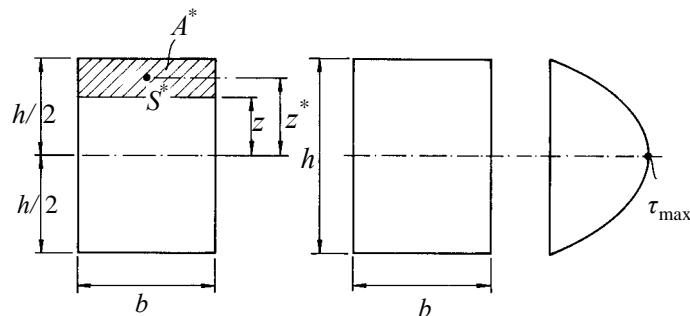


Abb. 10.5.3: Schubspannungen für den rechteckigen Querschnitt.

Wir betrachten zunächst das in der Abbildung 10.5.3 dargestellte Rechteckprofil, für das wir die Schubspannungsverteilung als Funktion der Trägerhöhenkoordinate y berechnen wollen. Offenbar gilt:

$$\tau(z) = \frac{Q A^* z^*}{I_{yy} b} = \frac{12 Q b \left(\frac{h}{2} - z\right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + z\right)}{b^2 h^3} = \frac{6Q \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)}{bh^3}. \quad (10.5.6)$$

Es ergibt sich also ein zur Trägermitte hin symmetrischer parabolischer Verlauf. Die maximale, in der Trägermitte auftretende Scherspannung ist gegeben durch:

$$\tau_{\max} = \frac{3Q}{2A}. \quad (10.5.7)$$

In ähnlicher Weise kann man für einen Kreisquerschnitt zeigen, dass gilt:

$$\tau_{\max} = \frac{4Q}{3A}. \quad (10.5.8)$$

Wenden wir uns nun zusammengesetzten Profilen zu, etwa dem in Abbildung 10.5.4 dargestellten Doppel-T-Träger. An den Stellen 1 sowie 2 ermitteln wir die jeweiligen Stegspannungen mit der Grundformel (10.5.5) zu:

$$\tau_1 = \frac{Q A_1^* z_1^*}{I_{yy} t_1}, \quad \tau_2 = \frac{Q (A_1^* z_1^* + A_2^* z_2^*)}{I_{yy} t_1}. \quad (10.5.9)$$

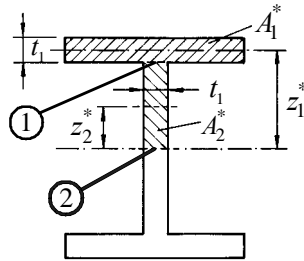


Abb. 10.5.4: Scherspannungen am Doppel-T-Profil.

Bei Doppel-T-Profilen überwiegt der Anteil $A_1^* z_1^*$ gegenüber dem Term $A_2^* z_2^*$. Somit kann man sagen, dass sich die Schubspannung im Steg eines solchen Trägers fast nicht ändert. Dies ist in Abbildung 10.5.5 illustriert (leichter parabelförmiger Abfall im Steg von der Mitte, Wert τ_2 , auf den Wert τ_1 an den Rändern). Um diese nahezu konstanten Schubspannungen näherungsweise zu bestimmen, kann man also entweder die obige Gleichung für τ_1 verwenden, oder man behilft sich mit der folgenden Faustformel:

$$\tau_1 \approx \tau_{\max} = \frac{Q}{A_{St}}, \quad (10.5.10)$$

wobei A_{St} die Fläche des Steges bezeichnet. Als nächstes soll der Schubspannungsverlauf in den Flanschen ermittelt werden. Um ihn zu berechnen, sei zunächst bemerkt, dass sich der Schubfluss T_1 am Ende des Steges, also das Produkt aus Schubspannung τ_1 und Stegbreite t_1 , sich bei Übergang in die Flansche nach zwei Seiten hin aufteilen muss. Wir schreiben:

$$T_1 = 2T_2 \quad , \quad T_1 = \tau_1 t_1 \quad , \quad T_2 = \tau_{Fl} t_2 \quad (10.5.11)$$

und erhalten:

$$\tau_{Fl} = \frac{Q A_1^* z_1^*}{2 I_{yy} t_2} \quad (10.5.12)$$

Dieser Wert gilt, wie in Abbildung 10.5.5 zu sehen, am Übergang zwischen Steg und Flansch. Zu den Flanschenden hin, nimmt dieser Wert linear ab, denn die zugehörige Fläche A_{Fl} nimmt linear auf Null ab.

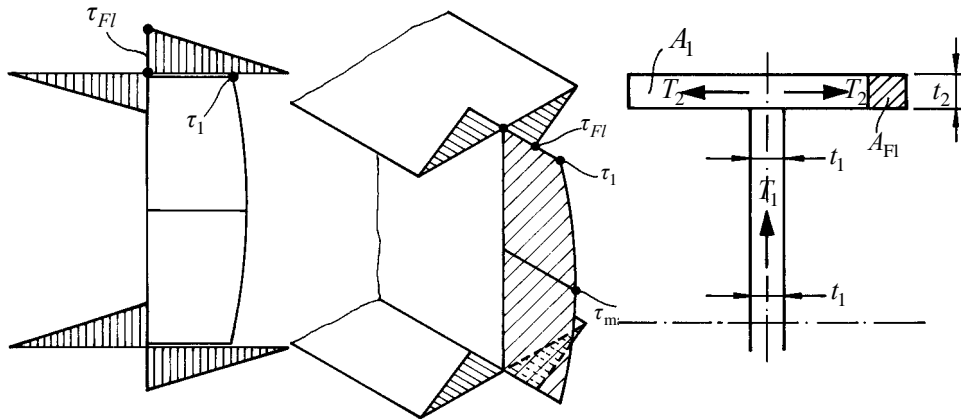


Abb.10.5.5: Schubfluss von Steg in den Flansch und Schubspannungsverlauf im Doppel-T-Profil

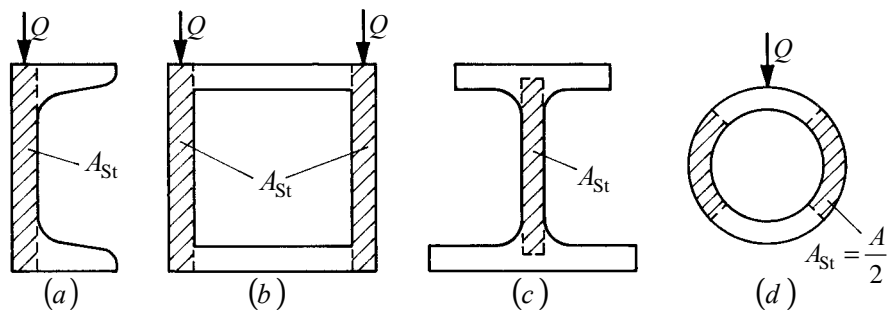


Abb. 10.5.6: Zur Schubspannungsberechnung bei verschiedenen Profilen.

So wie beim Doppel-T-Profil wird bei allen Profilen die Querkraft im wesentlichen von den in Krafrichtung ($Q!$) liegenden Querschnittsflächen übertragen; sehr oft ist dies die Stegfläche: Abbildung 10.5.6. Zur Abschätzung der Schubspannung verwendet man die Beziehung (10.5.10), wobei die Stegfläche manchmal etwas „erweitert“ und in den Flansch hineingezogen wird (siehe Abbildung 10.5.6 (c)). Aber auch beim Kreisrohr oder ähnlichen Profilen mit ausgeprägten Flanschen (Gurten) ist diese Berechnung meist ausreichend: Abbildung 10.5.6d.

10.5.3 Schubspannungen im geschweißten, geklebten und genieteten Träger

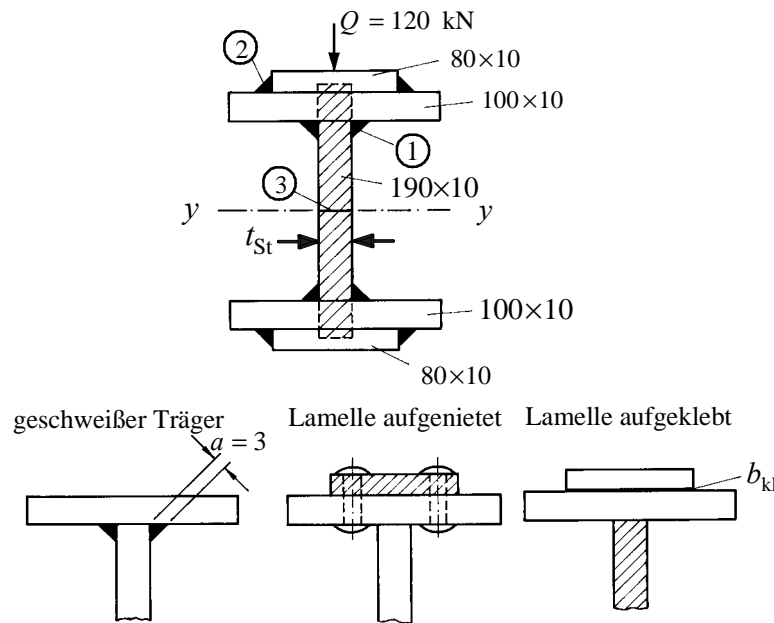


Abb. 10.5.7: Schubspannungen bei verschiedenen Verbindungsarten.

Betrachte den in Abbildung 10.5.7 dargestellten Träger, dessen Lamelle einmal geschweißt, dann genietet und schließlich geklebt wurde. Das Herstellungsverfahren wirkt sich deutlich auf die resultierenden Schubspannungen aus. Man ermittelt zunächst einmal das gesamte Flächenträgheitsmoment des Trägers gemäß dem Satz von STEINER, wobei beim horizontal liegenden Flansch („Fl“) und beim Aufsatz („Auf“) nur die STEINERSchen Anteile $a^2 A$ berücksichtigt werden und der Eigentragheitsmomente vernachlässigt werden kann:

$$I_{yy} = I_{St} + 2I_{Fl} + 2I_{Auf} = \left(1 \cdot \frac{19^3}{12} + 2 \cdot 10^2 \cdot 10 + 2 \cdot 11^2 \cdot 8 \right) \text{cm}^4 = 4508 \text{cm}^4. \quad (10.5.13)$$

Als nächstes werden die statischen Momente ermittelt und zwar für den Aufsatz, den Flansch und den Steg (die Indizes 1, 2 und 3 beziehen sich auf die in Abbildung 10.5.7 gezeigten Stellen):

$$\begin{aligned} (A^* z^*)_1 &= 8 \cdot 11 \text{cm}^3 = 88 \text{cm}^3, \\ (A^* z^*)_2 &= 10 \cdot 10 \text{cm}^3 = 100 \text{cm}^3, \\ (A^* z^*)_3 &= 9.5 \cdot \frac{9.5}{2} \text{cm}^3 = 45 \text{cm}^3. \end{aligned} \quad (10.5.14)$$

Kommen wir nun zuerst zum Fall des **geschweißten** Trägers. Für die **Naht 1** findet man:

$$\tau_1 = \frac{Q \left[(A^* z^*)_1 + (A^* z^*)_2 \right]}{I_{yy} 2a} = 83 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \quad (10.5.15)$$

und für die **Naht 2**:

$$\tau_2 = \frac{Q(A^* z^*)_1}{I_{yy} 2a} = 39 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (10.5.16)$$

Schließlich in der Stegmitte (die Stegbreite sei t_{St}):

$$\tau_3 = \frac{Q[(A^* z^*)_1 + (A^* z^*)_2 + (A^* z^*)_3]}{I_{yy} 2t_{\text{St}}} = 62 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (10.5.16)$$

Man beachte, dass man näherungsweise zum gleichen Ergebnis kommt, wenn man die Gleichung (10.5.10) ansetzt:

$$\tau_3 \approx \frac{Q}{A_{\text{St}}} = 63 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (10.5.17)$$

Im Fall der **aufgenieteten** Lamelle findet man für die im Niet herrschende Scherspannung:

$$\tau_{\text{Niet}} = \frac{Q(A^* z^*)_1}{I_{yy} 2A_{\text{Niet}}/c} = 40.7 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (10.5.18)$$

Dabei ist $c = 80 \text{ mm}$ der Nietabstand, der Nietdurchmesser sei $d = 17 \text{ mm}$ und $A_{\text{Niet}} = 2.3 \text{ cm}^2$ ist der daraus resultierende Nietenquerschnitt.

Abschließend diskutieren wir noch den Fall einer **aufgeklebten** Lamelle:

$$\tau_{\text{Niet}} = \frac{Q(A^* z^*)_1}{I_{yy} b_{\text{kleb}}} = 2.9 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}. \quad (10.5.19)$$

Aufgrund der großen Klebfuge $b_{\text{kleb}} = 8 \text{ cm}$ ergibt sich ein relativ kleiner Schubspannungswert, aber man muss bedenken, dass Kleber im allgemeinen auch nicht in der Lage sind, große Belastungen zu ertragen, womit sich das zunächst erfreuliche Ergebnis wieder relativiert.

10.5.4 Schubmittelpunkt

Betrachten wir nun einen Biegeträger, dessen Profil nicht symmetrisch zur Lastebene in der Schwerachse liegt, etwa das Walzprofil aus der Abbildung 10.5.8. Bei Lasteinleitung im Schwerpunkt resultiert eine Verdrehung des Trägers um seine Längsachse. Diese Verdrehung wird dadurch erzeugt, dass die Schubkräfte T in den Flanschen ein Moment in Bezug auf den Schwerpunkt ausüben: Abbildung 10.5.8. Die äußere Querblastung Q sowie die inneren Schubkräfte T_1 , T_2 und T_{St} sind nämlich nicht im Gleichgewicht, und somit entsteht um die Schwerachse ein Torsionsmoment, das den Träger verdreht. Es gibt jedoch einen Punkt, den sogenannten Schubmittelpunkt M , in dem die Belastung Q keine Verdrehung hervorruft. Für das in der Abbildung gezeigte Profil liegt derselbe bei $a = 3/8 b$ und zwar sieht man dies an der folgenden Berechnung. Gesucht ist der Abstand a des Schubmittelpunktes zum Stegmittelpunkt M' . Wir ermitteln ihn aus der Forderung nach Momentengleichgewicht bei Drehung um den Punkt M' :

$$\sum M^{(M')} = 0: Q a - 2T \frac{h}{2} = 0 \Rightarrow a = \frac{Th}{Q} = \frac{3}{8} b. \quad (10.5.20)$$

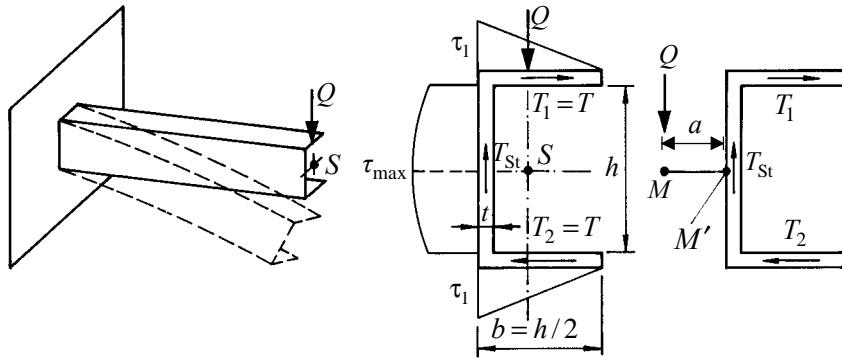


Abb. 10.5.8: Zum Begriff des Schubmittelpunktes.

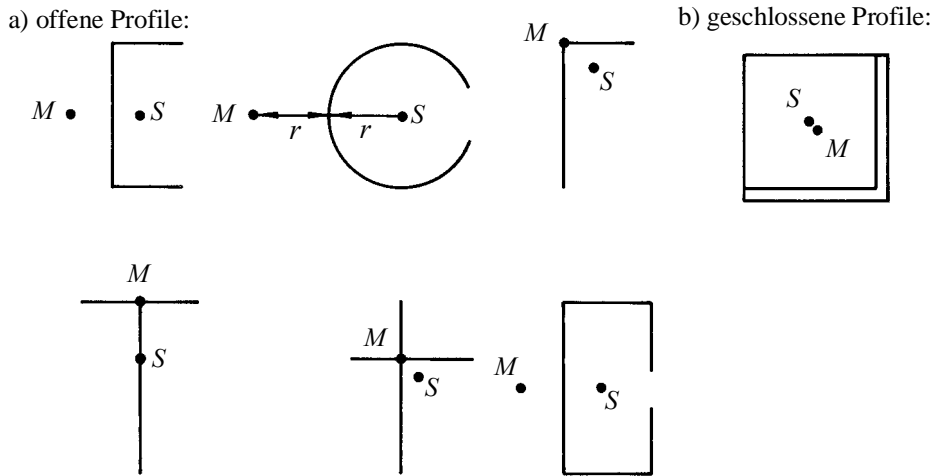


Abb. 10.5.9: Schubmittelpunkt bei verschiedenen Trägerprofilen (S : Schwerpunkt, M : Schubmittelpunkt).

Dabei wurden die Schubkräfte $T_1 = T_2 = T$ wie folgt ermittelt (siehe das Dreieck in Abbildung 10.5.8):

$$I_{yy} \approx \frac{t h^3}{12} + 2t b \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{t h^3}{3}, \quad \tau_1 = \frac{Q A^* z^*}{I_{yy} t} = \frac{Q}{I_{yy}} \frac{b h}{2}, \quad T = \tau_1 \frac{1}{2} b t = \frac{3}{16} Q. \quad (10.5.21)$$

Das geschilderte Phänomen tritt im Prinzip bei allen unsymmetrischen Profilen auf und insbesondere bei offenen unsymmetrischen Profilen: Abbildung 10.5.9. Bei unsymmetrischen geschlossenen Profilen liegt der Schubmittelpunkt M meist sehr dicht am Schwerpunkt S . Dadurch wird das entstehende Torsionsmoment gering. Die Torsionssteifigkeit solcher geschlossenen Profile ist ein Vielfaches der des offenen Profils (bei gleicher Querschnittsfläche), so dass hier i.a. der Verdrehungseinfluss vernachlässigt werden kann.