Das Verfahren von Castigliano II. Die Sätze von Betti und Maxwell

I. Einflußzahlen. Betrachtet wird ein *linear elastisches* System. In N Angriffspunkten wirken Kräfte Q_i. Verschiebungen der Angriffspunkte in der Richtung der jeweiligen Kraft seien q_i. Aus der Linearität folgt:

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} \alpha_{ij} Q_j \,. \qquad (1)$$

Die Koeffizienten α_{ij} werden *Maxwellsche Einflußzahlen* genannt. Aus (1) folgt: $\alpha_{ij} = \dfrac{\partial q_i}{\partial Q_j}$.

Nach dem Satz von Castigliano gilt aber $q_i = \dfrac{\partial U}{\partial Q_j}$.

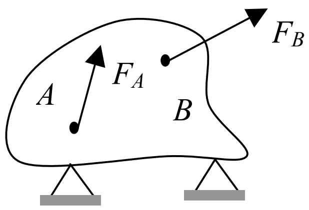
Für die Einflußzahlen ergibt sich deshalb:

$$\alpha_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial Q_i \partial Q_j}.$$

Daraus folgt $\boxed{\textbf{der Satz von Maxwell: } \alpha_{ij} = \alpha_{ji}}$.

II. Der Satz von Betti (auch *Reziprozitätssatz von Betti*). *Wenn ein linearelastischer Körper zwei verschiedenen Lastsystemen ausgesetzt ist, so ist die Arbeit der Kräfte des ersten Systems an den Verschiebungen des zweiten Systems gleich der Arbeit der Kräfte des zweiten Systems an den Verschiebungen des ersten Systems.*

Beweis:

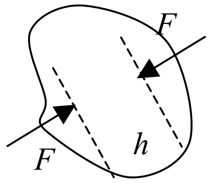


Zu beweisen ist also, daß $F_A \delta u_{AB} = F_B \delta u_{BA}$, wobei δu_{AB} die Verschiebung des Punktes A (in der Richtung der Kraft F_A) unter der Wirkung der Kraft F_B ist und δu_{BA} umgekehrt. Aus dem Satz von Maxwell folgt

$$F_A \delta u_{AB} = F_A \alpha_{AB} F_B,$$

$$F_B \delta u_{BA} = F_B \alpha_{BA} F_A = F_A \alpha_{AB} F_B.$$

Beispiel: Zu bestimmen ist die Änderung des Volumens eines elastischen Körpers beliebiger Form unter der Einwirkung eines Kräftepaars. Abstand zwischen den Angriffspunkten der Kräfte sei h.



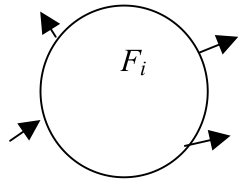
Lösung: Betrachten wir außer des Kräftepaars auch einen hydrostatischen Druck p.

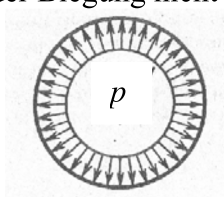
Δh_p sei die Änderung des Abstandes zwischen beiden Angriffspunkten unter der Einwirkung des Druckes; ΔV_F sei die Änderung des Volumens unter der Einwirkung des Kräftepaars. Nach dem Satz von Betti: $F \Delta h_p = p \Delta V_F$. Unter der Wirkung des hydrostatischen Druckes

$$\varepsilon = \frac{\Delta h_p}{h} = \frac{\sigma}{E} - \nu \frac{\sigma}{E} - \nu \frac{\sigma}{E} = \frac{p}{E}(1-2\nu). \Rightarrow$$

$\Delta h_p = \dfrac{p}{E}(1-2\nu) h$. Aus dem Satz von Betti folgt dann $\Delta V_F = \dfrac{F h (1-2\nu)}{E}$.

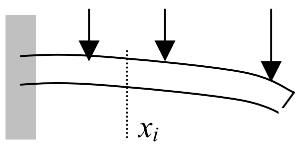
Beispiel 2: Eine sphärische, nicht dehnbare Schale ist belastet durch ein beliebiges Kräftesystem. Zu zeigen ist, daß sich das eingeschlossene Volumen bei der Biegung nicht ändert.





Lösung: $p \cdot \delta_F = \sum F_i \delta_{ip} = 0$.

Beispiel 3.



Gegeben: Ein gerader Balken steht unter der Wirkung von n Einzellasten. Gefragt wird nach Verschiebung $w(x_i)$ in einem beliebigen Punkt x_i.

Lösung: Definitionsgemäß gilt $w(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} F_j$.

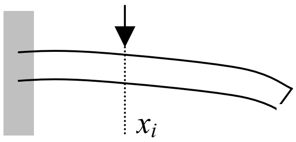
Nach dem Satz von Maxwell: $w(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} F_j$.

α_{ji} ist die Verschiebung $w(x_j)\big|_{F_i=1}$ unter der

Wirkung einer Einheitslast im Punkt *i*. Somit

$$w(x_i) = \sum_{j=1}^{n} w(x_j)\big|_{F_i=1} F_j \,.$$

Damit ist die Aufgabe zwar nicht gelöst, wird aber viel leichter lösbar, als die ursprüngliche.



$$x \in (0, x_i): \quad w(x) = -\frac{F x_i}{2EI} x^2 + \frac{F}{6EI} x^3$$

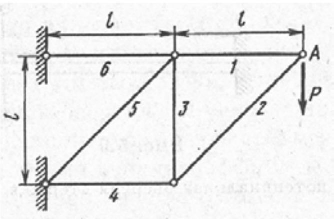
$$x \in (x_i, l): \quad w(x) = -\frac{F x_i^3}{3EI} - \frac{F x_i^2}{2EI}(x - x_i)\,.$$

Z.B., wenn alle Kräfte links vom Punkt angreifen, in dem die Absenkung gesucht wird, so findet man:

$$w(x_j)\big|_{F_i=1} = -\frac{x_i^3}{3EI} - \frac{x_i^2}{2EI}(x - x_i) = \frac{x_i^3}{6EI} - \frac{x_i^2}{2EI} x$$

$$w(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{x_i^3}{6EI} - \frac{x_i^2}{2EI} x_j \right) F_j \,.$$

Beispiel 4: Elastische Formänderung von Fachwerken.



Zu bestimmen ist die vertikale Verschiebung des Punktes A.

<u>Lösung:</u> Zunächst werden Stabkräfte N_i in allen Stäben bestimmt und die jeweilige potentielle Energie $U_i = \dfrac{N_i^2 l_i}{2EA}$ berechnet.

No.	N_i	l_i	U_i
1	P	l	$P^2 l/2EA$
2	$-P\sqrt{2}$	$l\sqrt{2}$	$2P^2 l\sqrt{2}/2EA$
3	P	l	$P^2 l/2EA$
4	$-P$	l	$P^2 l/2EA$
5	$-P\sqrt{2}$	$l\sqrt{2}$	$2P^2 l\sqrt{2}/2EA$
6	$2P$	l	$4P^2 l/2EA$

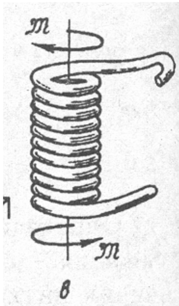
Die gesamte potentielle Energie ist

$$U = \frac{P^2 l}{2EA}\left(7 + 4\sqrt{2}\right).$$

Die gesuchte Verschiebung des Punktes *A* ist

$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{Pl}{EA}\left(7 + 4\sqrt{2}\right).$$

Beispiel 5: Berechnung der Federkonstante einer "Torsionsfeder".



Parameter der Feder seien die folgenden: Durchmesser des Drahtes *d*, Radius der Feder *R*, Anzahl der Windungen *N*, Elastischer Modul *E*.
Zu bestimmen ist die Torsionssteifigkeit γ: $M = \gamma\varphi$, wobei φ der Torsionswinkel ist.

In jedem Querschnitt der Feder wirkt das Kraftmoment *M*. Die potentielle Energie der Feder ist.

$$U = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI} dx = \frac{M^2}{2EI} l = \frac{M^2}{2EI} 2\pi R N$$

Der Drehwinkel ist $\varphi = \dfrac{\partial U}{\partial M} = \dfrac{M}{EI} 2\pi R N$.

Das geometrische Trägheitsmoment eines Kreises ist

$I = \dfrac{\pi d^4}{64}$. Für den Drehewinkel erhalten wir

$\varphi = \dfrac{128 M}{E d^4} R N$. Die Federsteifigkeit ist

$$\gamma = \frac{E d^4}{128 MRN}\,.$$